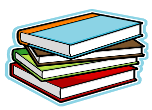
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR **Enero-Marzo 2010**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
MATEMÁTICA I (MA-1111)
Fecha de publicación: 03-03-2010

Contenido Tercer Parcial

PRÁCTICA DE APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS II



Contenidos

- Teorema de Rolle.
- Teorema del valor medio
- Formas indeterminadas y regla de L'Hopital.

♪

Repaso en una Corchea

RECUERDE QUE:

Las situaciones en las que no es posible conocer, de antemano, el valor de la operaciones con límites son:

Lo que sucede con los límites de f y g	Expresión reducida	Técnicas para hallar el límite
$Lim\,\frac{f}{g}=\frac{\to\infty}{\to\infty}$	$\frac{\infty}{\infty}$	• Estudio de los grados del numerador y del denominador (3) • Regla de L'Hôpital (2)
$Lim\,\frac{f}{g}=\frac{\to 0}{\to 0}$	$\frac{0}{0}$	• Descomponer el factores • Infinitésimos equivalentes (1) • Regla de L'Hôpital (2)
$Lim\quad f-g=(\to\infty)-(\to\infty)$	$\infty-\infty$	• Realizar las operaciones indicadas • Análisis del grado de f y g • Multiplicar y dividir por (f + g)
$Lim\ f\cdot g=(\to 0)\cdot(\to\infty)$	$0.\infty$	• Realizar las operaciones indicadas

Ejercicios tomados del Problemario Cálculo Diferencial e Integral por publicar

		• Convertir a: $f \bullet g = \frac{f}{1/g} \to \frac{\infty}{\infty}$ • Convertir a $f \bullet g = \frac{g}{1/f} \to \frac{o}{o}$ Convertir $f \bullet g = e^{Ln\,\mathrm{f} + Ln\,\mathrm{g}} \to e^{\infty\,\pm\,\infty}$
$Lim\ \ \mathrm{f}^{\mathrm{g}} = (\to 1)^{\to \infty}$	1^{∞}	• $Lim\ \ \mathrm{f}^{\mathrm{g}} = (e)^{\lim(f-1)g}$
$Lim\ \ \mathrm{f}^{\mathrm{g}} = (\to 0)^{\to 0}$	0^{0}	• $Lim\ \ \mathrm{f}^{\mathrm{g}} = (e)^{\lim g.Lnf} = \!\!\to e^{0.\infty}$
$Lim\ \ \mathrm{f}^{\mathrm{g}} = (\to \infty)^{\to 0}$	∞^{0}	• $Lim\ \ \mathrm{f}^{\mathrm{g}} = (e)^{\lim g.Lnf} = \!\!\to e^{0.\infty}$

Regla de L'Hôpital: En los casos de indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$ y $\frac{\to \infty}{\to \infty}$ se puede aplicar la que se conoce como Regla de L'Hopital: $Lim \frac{f}{g} = Lim \frac{f'}{g'}$

Ejercicios

Limites donde se aplica la regla de L'Hopital

1.Aplicando la Regla de L'hopital calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2}{3x^4 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{5x^2 - 7x - 6}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$

Observación: Hay ejercicios que no hace falta aplicar L'Hopital, lo recomendable es que deriven para que practiquen.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x-1}{2x^2+x+2}=2 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+5}{-1+3x+4x^2}=0'5 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{1-3x^2}=0 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{1-3x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1+4x^2}{2x^2-x+5}=2 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{5+2x+3x^2}{2x-6x^2+5}=-0'5 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-6x^2+5}{3-2x+3x^2}=-2 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^3-1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x^3-1}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{x+2}=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{2-x}=-\infty \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{-x+2}=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x^2-1}{x^2+2}=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x^2-1}{x^2+2}=-\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3x^3}{x^2+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x^2-x}}{2x-1}=+2 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{16x^2-1}}=-0'5 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{\sqrt{16x^2-1}}=\infty \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2-x}}{2x^3-1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=2 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=2 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{4-8x^3}}{x-1}=-2 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{4-8x^3}}{x-1}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{4-8x^6}}{1-x^2}=2 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{4-8x^6}}{1-x^2}=-2 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{0'25x^4+1}}{x^2+1}=0'5 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{16x^2-x}}{2x^2-1}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{2x+7}\times\frac{3x-1}{4x-2}=\infty \quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{x^4+1}\times\frac{1}{x^2-x}=0 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3x+1}{x+2}}=1 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{(x+2)\sqrt{x}}=0 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{x^2+1}}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x-1}{x-3}}=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{3x-4}\right)^2=\frac{16}{9} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2-1}}\right) \quad \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{x^2+3}{4x^2-2}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}}{(\sqrt[5]{x}-3)(4-\sqrt[5]{x})}=-\infty \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{2-3x}{1-x}}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{x^3+2x-3}-\frac{x^6+3x-2}{x^5-6x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-5x-1}-\sqrt{4x^4+1}}{x^2-3x+1}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)\sqrt{9x^2-1}}{4x^3-6x^2-2}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{x}}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{4x-\sqrt{9x^2-2}}=3$$

𝅘𝅥𝅯

Repaso en una SemiCorchea

RECUERDE QUE:

Teorema de Rolle:

Si f es una función en la que se cumple:
(i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
(ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)
(iii) $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$
Entonces, existe un número c que pertenece a (a, b) tal que
$f'(c) = 0$

E l Teorema de Rolle se atribuye al matemático francés Michel Rolle (1652-1719).

Teorema del Valor medio:

Si f es una función en la que se cumple que:
(i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
(ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)
Entonces, existe un número c que pertenece a (a, b) tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ejercicios

Teoremas: Valor medio derivadas y Rolle.

3

a) Halla la C del T.V.M. de la función $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{3}$ **en el intervalo** $[2, 2+h]$

b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.

4

a) Halla la C del T.V.M. de la función $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ en el intervalo $[1, 1+h]$

b) Con el resultado obtenido, calcula $f'(1)$.

5

Ejercicios resueltos

En los ejercicios 1 a 3, verifique que las condiciones (i), (ii) y (iii) de la hipótesis del Teorema de Rolle se cumplen para la función indicada en el intervalo dado. Luego halle un valor adecuado para *c* que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle.

En los ejercicios 4 a 9, compruebe que la hipótesis del Teorema del Valor medio se cumple para la función dada en el intervalo indicado. Luego halle un valor adecuado para *c* que cumpla la conclusión del Teorema del valor medio.

En los ejercicios 10 a 12, (a) trace la gráfica de la función dada en el intervalo indicado; (b) compruebe las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle y determine cuáles se cumplen y cuáles, de haberlas, no se cumplen; (c) si las tres condiciones se cumplen, determine un punto por el cual pase una recta tangente horizantal.

En los ejercicios 13 y 14, calcule un valor de *c* que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio, trace la gráfica de la función y la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3;\ [1,3]$
2. $f(x) = \operatorname{sen} 2x;\ \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$
3. $f(x) = 3\cos 2x;\ \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$
4. $f(x) = x^2 + 2x - 1;\ [0, 1]$
5. $f(x) = x^3 + x^2 - x;\ [-2, 1]$
6. $f(x) = x^{2/3};\ [0, 1]$
7. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x};\ \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$
8. $f(x) = \sqrt{1 + \cos x};\ \left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7};\ [2, 6]$
10. $f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3};\ [0, 3]$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3}$; $[-3, 4]$

12. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $\left[-2, \dfrac{8}{5}\right]$

13. $f(x) = x^2$; $a = 2$, $b = 4$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = 0$, $b = \frac{1}{2}\pi$

Ejercicios Tipo Selección Simple:

I. En cada caso, selecciona el valor del límite indicado.

.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{2x}$

a) 0

b) $+\infty$

c) $-\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7}{\sqrt{2x^3} - 6}$

a) $+\infty$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) No existe

e) Ninguna de las anteriores

3. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (2x - 1)\tan(\pi x)$

a) $\dfrac{2}{\pi}$

b) 0

c) $-\dfrac{2}{\pi}$

d) $+\infty$

e) Ninguna de las anteriores

4. $\lim\limits_{x \to 3^+} \left[\dfrac{18}{x^2 - 9} - \dfrac{x}{x - 3}\right]$

a) $+\infty - \infty$

b) $\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{3}{2}$

d) $-\dfrac{3}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

5. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\csc x - \dfrac{1}{x}\right)$

a) 0

b) $senx$

6. $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{6}{x^2 - 9} - \dfrac{1}{x - 3}\right)$

a) $+\infty$

b) $\dfrac{1}{6}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x^2 + 4}{x\text{sen}x}$

a) 7

b) $\dfrac{1}{7}$

8. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{5\sec x + 1}{\tan x}$

a) 0

b) 10

c) π

d) $+\infty$

e) Ninguna de las anteriores

c) $-\frac{1}{6}$

d) $-\infty$

e) Ninguna de las anteriores

c) 4

d) $+\infty$

e) Ninguna de las anteriores

c) $+\infty$

d) 5

e) Ninguna de las anteriores

9. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x}$

a) 1

b) 0

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $+\infty$

e) Ninguna de las anteriores

10. $\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{-x}}$

a) No existe

b) 1

c) 0

d) $-\infty$

e) Ninguna de las anteriores

11. $\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} (\sec x + \tan x)$

a) $+\infty$

b) $-\frac{\pi}{2}$

c) 2

d) 0

e) Ninguna de las anteriores

12. $\lim_{x \to 0^+} \left(\csc x - \frac{1}{x} \right)$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) 0

d) 1

e) Ninguna de las anteriores

13. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan\ (x)}{8x^3}$

a) 0

b) $+\infty$

14. $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{3\sec + 7}{\tan x}$

a) $+\infty$

b) 7

15. $\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

a) $\frac{1}{3}$

b) 0

16. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x - \pi)}{4x - \pi}$

a) 0

b) $\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{24}$	**c**) 3	**c**) $-\frac{1}{3}$	**c**) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{24}$	**d**) No existe	**d**) 2	**d**) $-\frac{1}{2}$
e) Ninguna de las anteriores	**e)** Ninguna de las anteriores	**e)** Ninguna de las anteriores	**e)** Ninguna de las anteriores

II. En cada caso, selecciona la afirmación correcta.

¿Cuáles de las funciones definidas a continuación satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado?

1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^4}$, en $[-1,1]$ **2**) $f(x)=x^8-1$, en $[-1,1]$ **3**) $f(x)=\tan x$, en $[0,\pi]$

4) $f(x)=\cos x$, en $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ **5**) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$, en $[-2,2]$ **6**) $f(x)=\arctan x$ en $[-1,1]$

a) Sólo la 2

b) La 2) y la 3)

c) La 2), la 3) y la 4)

d) Sólo la 2) y la 4)

e) Ninguna de las anteriores

¿Cuáles de las funciones definidas a continuación satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado?

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, en $[-3,-2]$ **2)** $f(x)=\sqrt{x+4}$, en $[0,12]$

3) $f(x)=\frac{x^4-3x+2}{\cos x}$, en $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ **4)** $f(x)=x^{-4}+5x$, en $[-1,2]$

5) $f(x)=\frac{\arctan(2x)}{3-x}$, en $[0,\pi]$ **6**) $f(x)=\frac{\cos^2\left(\sqrt{4+x^8}\right)}{\sqrt{3}}$, en $\left[-4,\sqrt{10}\right]$

a) Sólo 1) y 2)

b) 1), 2), 4)

c) 2) y 5)

d) 1), 2), 3) y 6)

e) Ninguna de las anteriores

III. Selecciona, en cada caso, el número *c* garantizado por el Teorema del valor medio.

1. $f(x)=3\sqrt{x}$ en $[1,3]$

a) $\sqrt{3}-1$

b) $1-\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

d) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$

e) Ninguna de las anteriores

2. $f(x)=\arctan x$ en $[0,1]$

a) $\sqrt{\frac{4}{\pi}}-1$

b) $\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$

c) $\sqrt{\frac{\pi}{4}-1}$

d) No se cumple el teorema

e) Ninguna de las anteriores

3. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ en $[-1,1]$

a) $-\frac{2}{5}$

b) -2

c) $-\frac{2}{3}$

d) No se cumple el teorema

e) Ninguna de las anteriores

IV. Selecciona, en cada caso, el valor o valores de *c* garantizados por el Teorema de Rolle.

1. $f(x)=\cos 2x$ en $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$

a) $c_1=0 \quad y \quad c_2=\pi$

b) $c_1=0, \quad c_2=\pi \quad y \quad c_3=\pi$

2. $f(x)=\left(\arctan x\right)^2$ en $[-1,1]$

a) $c_1=-\frac{\pi}{4} \quad y \quad c_2=\frac{\pi}{4}$

b) $c=0$

3. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en $[-1,1]$

a) $c=0$

b) $c_1=-1 \quad y \quad c_2=1$

c) $c = 0$

d) No se cumple el teorema

e) Ninguna de las anteriores

c) $\sqrt{\frac{\pi}{4} - 1}$

d) No se cumple el teorema

e) Ninguna de las anteriores

c) $c_1 = -\frac{1}{2} \quad y \quad c_2 = \frac{1}{2}$

d) No se cumple el teorema

e) Ninguna de las anteriores

Ejercicios Extras

2. Demuestre que $4x^5 + 5x^4 - 1$ tiene una sola raíz en el intervalo $[0, 1]$.
3. Pruebe que $\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para $x \in [-1, 1]$.
4. Sea $f(x) = x^{2/3}$, muestre que no existe un numero c en $(-2, 2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{4}$. ¿Qué hipótesis del TVM no se cumple para f en $a = -2$ y $b = 2$?.
5. Si $f'(x) \leq 2$ para toda x en el intervalo $[0, 3]$ y $f(0) = 1$, entonces $f(3) < 8$.
6. Demuestre que si $F'(x) = D$ para toda $x \in (a, b)$, entonces existe una constante C tal que $F(x) = Dx + C$ para toda $x \in (a, b)$ (Sugerencia: sea $G(x) = Dx$, derive G).
7. Demuestre la siguiente identidad

$$\arctan(x_2) - \arctan(x_1) \leq x_2 - x_1, \text{ con } x_1 < x_2.$$

1. Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x \operatorname{sen}(x)}$ b) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$ d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$

2. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Una función continua en un intervalo es derivable en todos sus puntos del interior.

b) Si una función es continua en un punto, entonces es derivable en el punto.

c) Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en el punto.

d) La función derivada es siempre continua.

e) Los polinomios admiten infinitas derivadas.

f) Si una función es derivable infinitas veces, entonces es un polinomio.

3. Suponga que $f(2) = 3, f'(2) = 4, f''(2) = -1, g(2) = 2$ y $g'(2) = 5$. Encuentre cada valor

a) $\frac{d}{dx}\left[f^2(x) + g^3(x)\right]$ en $x = 2$.

b) $\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right]$ en $x = 2$.

c) $\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right]$ en $x = 2$.

d) $D_x^2\left[f^2(x)\right]$ en $x = 2$.

4. Demuestre que las tangentes a las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ en $(1, 2)$ son perpendiculares entre si. Sugerencia: use derivación implícita.

5. Encuentre la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ por definición.

6. Encuentre $(f^{-1})'(2)$ dado que $f(x) = 3x^5 + x - 2$.

Practica elaborada por la Prof:
Aida Montezuma.
Ampliada por Prof
Antonio Di Teodoro. 2010. (Basada en prácticas anteriores de la USB-Matemáticas), en Especial las prácticas de la Profa ***Diasparra Maikol.***
Formato doc->Pdf